DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(durée : 4 heures - coefficient 6)

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivables, telles que :

$\forall\ k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels > 0 M_k et A_k et un entier positif p_k dépendant de f, vérifiant la propriété suivante:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ |f^{(k)}(x)| \leq M_k |x|^{p_k} + A_k \qquad (P)$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction $f \in E$.

Le problème est constitué de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Partie I

I 1)a) Montrer que l'ensemble E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Montrer que l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est inclus dans E.

1)b) Montrer que E est stable par le produit.

2)a) Montrer que $\forall\ f \in E\ , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-x^2}\ dx$ converge absolument.

b) On définit sur $E \times E$ une application, notée $< , >$,par :

$$\forall\ f \in E\ ,\quad \forall\ g \in E\ ,\qquad < f, g > = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\ g(x)\ e^{-x^2}\ dx\ .$$

Montrer que E, muni de cette application, est un espace préhilbertien complexe.

Désormais, on notera $< f, g >$ le produit scalaire de deux éléments f et g de E ,et $\| f \|$ la norme (associée à ce produit scalaire) d'un élément f de E.

3) Dans cette question, n désigne un entier positif ou nul.

a) On pose $H_o = 1$.

Montrer que $\forall\ n \geq 1$ il existe un polynôme H_n de degré égal à n,

tel que: $\forall\ x \in \mathbb{R}\quad (e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)\ e^{-x^2}$.

b) Determiner H_1, H_2, H_3, H_4.

c) Montrer que $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(x) = -2x\ H_n(x) - 2n\ H_{n-1}(x)\ .$$

d) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, étudier la parité de H_n, déterminer son coefficient dominant.

4)a) P désignant une fonction polynôme à coefficients complexes, montrer que: $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $< P , H_n > = - < P', H_{n-1} >$ (P' désignant le polynôme dérivé de P).

b) En déduire que, si deg(P) < n, $< P , H_n > = 0$,et que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(H_0, H_1, \ldots\ldots H_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ considéré comme sous-espace vectoriel de E.

c) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes et que si on désigne par $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n$ les racines de H_{n+1} et par $b_0, b_1, \ldots\ldots b_{n-1}$ les racines de H_n alors les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$a_0 < b_0 < a_1 < \ldots\ldots < b_{n-1} < a_n \ .$$

Indication:on pourra effectuer une récurrence et utiliser le théorème de Rolle ou employer toute autre méthode.

Partie II

Dans cette partie,on se propose d'étudier trois opérateurs linéaires notés C,D,U sur E. L(E) désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

$\forall\ f \in E$, f'et f" désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de f.

On définit C, D, U par :

$$\forall\ f \in E \qquad C(f) = -f' + 2xf$$

$$D(f) = f'$$

$$U(f) = -f'' + 2xf' + f$$

1)a) Vérifier que C, D, U sont éléments de L(E).

b) Trouver le noyau de C, le noyau de D.

c) Calculer CoD et DoC en fonction de U et I, I désignant l'endomorphisme identité sur E.
En déduire DoU - UoD puis CoU - UoC en fonction de D et de C.

d) $\forall\ (f,g) \in E \times E$,comparer $< C(f) , g >$ et $< f , D(g) >$; puis $< U(f) , g >$ et $< f , U(g) >$.

2)a) Trouver les valeurs propres de C, les vecteurs propres associés dans E.
b) Trouver les valeurs propres de D, les vecteurs propres associés dans E.

3) Dans toute cette question, λ désigne une valeur propre de U.

a) $\forall\ (f,g) \in E \times E$, trouver une relation entre $< U(f) , g >$ d'une part, et $< f' , g' >$ et $< f , g >$ d'autre part.

b) Montrer que toute valeur propre λ de U est réelle et que $\lambda \geq 1$.Déterminer Ker(U - I).

c) Soit f un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ. Etablir les égalités suivantes:

$$\| C(f) \|^2 = (\lambda+1) \| f \|^2$$

$$\| D(f) \|^2 = (\lambda-1) \| f \|^2$$

$$UoC(f) = (\lambda+2)\, C(f) \qquad UoD(f) = (\lambda-2)\, D(f)$$

d) Montrer que toute valeur propre de U est un entier impair strictement positif et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si $\lambda_n = 2n+1$ est valeur propre de U, alors $D^n(f)$ est un vecteur propre de U associé à la valeur propre 1.
Indication:on pourra étudier la suite $(D^k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ et prouver qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $D^p(f) = 0$ et $D^{p-1}(f) \neq 0$.

e) Réciproquement,montrer que si f est un vecteur propre de U associé à la valeur propre 1 alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n = C^n(f)$ est un vecteur propre de U associé à la valeur propre $\lambda_n = 2n+1$. En déduire le spectre de U.(On ne demande pas de déterminer les sous-espaces propres associés.)

4) On pose $f_o = 1$. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,on pose $f_n = C^n(f_o) = C(f_{n-1})$.
Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynôme dont le degré est n.

5) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de U, f et g des vecteurs propres de U, associés respectivement à λ et μ .
Montrer que $< f, g > = 0$.

6) Dans cette question, on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question II)4).

a)Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n-1 \Rightarrow < f_p, f_n > = 0$.En déduire que $(f_p)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour le produit scalaire $< , >$.

b)Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante k_n telle que $f_n = k_n H_n$ où $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite de polynômes définie dans la partie I (question I)3)).

c)Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $C^k o\, D^k = (DoC - 2kI) o C^{k-1} o D^{k-1}$.
En déduire que, si f est un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ f est également un vecteur propre de $C^k o\, D^k$ pour une valeur propre à préciser.

d)Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la dimension du sous-espace propre de U associé à la valeur propre $\lambda_n = 2n+1$? Donner une base de ce sous-espace propre.

7)a) On considère l'intégrale $c = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ .Montrer que

c existe et que $c = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$ .Calculer c, en déduire $\| H_o \|$.

b)En utilisant II)1)c) et II)3)c) montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \| H_{n+1} \| = \sqrt{2n+2}\ \| H_n \| .$$

En déduire, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\| H_n \|$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = \dfrac{H_n}{\| H_n \|}$.Que peut-on dire de la famille $\{ G_n \}_{n\in\mathbb{N}}$?

PARTIE III

Dans cette partie $\mathbb{A}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, développables en série entière de rayon de convergence infini.

On appelle V l'application définie par:

$$\forall\, f \in \mathbb{A},\ V(f) = -f'' + 2xf' + f .$$

1) Vérifier que V est un élément de $\mathbb{L}(\mathbb{A})$.

2) Trouver le noyau de V.

3) Soit λ un réel fixé, f un élément de $\mathbb{A}$. On pose:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n x^n .$$

A quelle condition sur la suite (a_n) la fonction f est-elle solution de l'équation $V(f) = \lambda f$?

On écrira avec précision les relations entre les coefficients a_n. On vérifiera que le rayon de convergence des séries obtenues est bien $+\infty$.

Pour quelles valeurs de λ existe-t-il des solutions polynômes non nulles?

Quel est le spectre de V? $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, donner la dimension de $\mathrm{Ker}(V - \lambda I)$.

4) Déterminer $\mathrm{Ker}(V - I)$, $\mathrm{Ker}(V - 3I)$.

(On pourra exprimer les résultats à l'aide de la primitive de la fonction $x \to e^{+x^2}$ nulle en 0 qu'on notera F.)

5) On pose $\lambda = -1$. Trouver les solutions paires de l'équation $V(f) = -f$ dans $\mathbb{A}$. En déduire la solution générale de cette équation. (On pourra utiliser la primitive définie en 4).